**Потенциал**.

Потенциальной энергией тела называется физическая величина, убыль которой равна работе всех консервативных сил, действующих на тело. В механике, например, такие силы – сила тяжести и сила упругости, при условии, что последняя подчиняется закону Гука. Главная особенность подобных сил заключается в том, что их работа не зависит от траектории, а зависит только от начального и конечного положения тела. В теории электричества такой силой является сила взаимодействия между заряженными телами, описываемая законом Кулона.

Заряд создает вокруг себя поле

Сила, с которой он действует на точечный заряд , помещенный в его поле

Разумеется, можно рассуждать и наоборот, но сейчас мы рассмотрим заряд в поле заряда .

Вычислим работу поля при перемещении заряда в поле заряда .

Это криволинейный интеграл. Поскольку , можем написать .

*Разность потенциалов между точками 1 и 2 есть работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по произвольному пути от точки 1 до точки 2.*

Иными словами, положив должны получить . Или

Это потенциал поля заряда на расстоянии от заряда. Величину можно трактовать также как работу поля, необходимую для переноса заряда из данного места на бесконечность, при условии, что на бесконечности потенциал равен нулю.

Вообще же

Итак, пусть заряд находится в некотором поле. При перемещении этого заряда из положения 1 где потенциал поля равен в положение 2, где потенциал поля равен поле совершает работу над зарядом :

Внешние силы совершают работу

Для малых перемещений

С другой стороны

Так что

Расписав формулы по осям координат, можем получить

Поскольку определена *разность* потенциалов, то сам потенциал определен с точность до постоянной величины. Ее можно вычислить при определенных условиях. Например, предположив, что на бесконечности потенциал должен обратиться в нуль.

Вернувшись к определению потенциальной энергии, можем написать

Таким образом, потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов равна

Она также определена с точностью до аддитивной постоянной.

Чтобы не путаться в знаках, рассмотрим примеры. Пусть . Здесь силы отталкивания. Пусть заряд удаляется от заряда . Тогда и – работа поля заряда положительна. Если работа поля будет отрицательной. Действительно такое движение возможно только против поля. В свободном движении заряды должны притягиваться, а они удаляются друг от друга. Собственно, на этом и основан выбор знаков.

Результирующий потенциал в некоторой точке равен алгебраической сумме потенциалов, созданных полями отдельных зарядов:

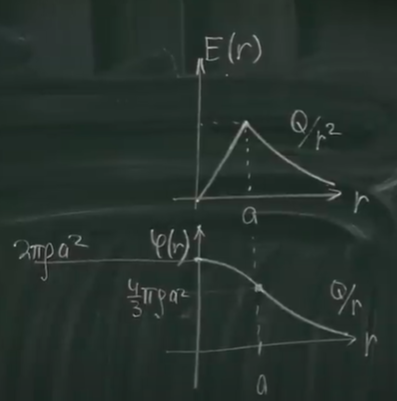
Единицы измерения.

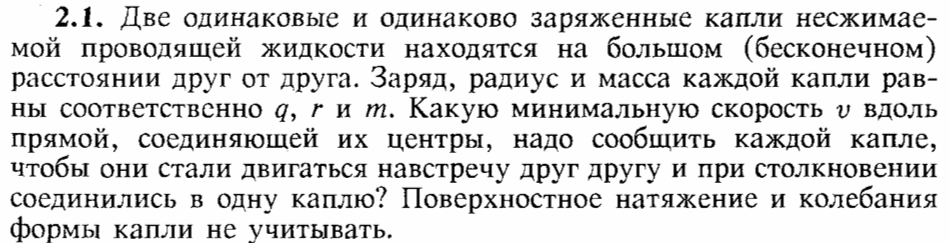
Потенциалы

**Задача**. Вычислить потенциал шара с радиусом равномерно заряженного по объему с объемной плотностью .

**Решение**. Вне шара

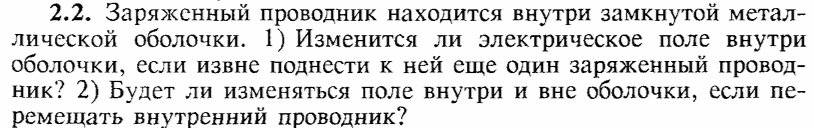
Внутри шара.

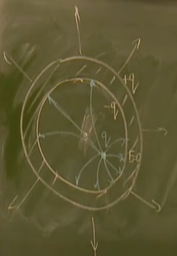
Условие непрерывности потенциала



**Решение**. Энергию капли найдем как работу внешних сил, необходимых для заряда капли. Эта работа идет на приобретение каплей потенциальной энергии

При объединении двух шариков радиусом появится шар с радиусом , поэтому энергия полученной капли . Запишем закон сохранения энергии

**

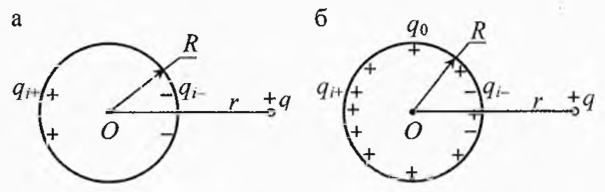
**Решение**. Внутри заряженной оболочки поле равно нулю и всякое изменение зарядов внутри или снаружи проводника сопровождается изменением индуцированного заряда на проводнике таким образом, чтобы поле оставалось равным нулю.

Если – заряд проводника, то на внутренней поверхности металлической оболочки будет заряд , а на внешней по закону сохранения заряда.

1) При приближении снаружи заряженного тела, на поверхности оболочки заряды перераспределяться так, чтобы внешнее поле внутрь не попало. По теореме Гаусса, внешние заряды по отношению к замкнутому контуру, не влияют на поле, пронизывающее контур.

2) Любое изменение положения проводника никак не скажется на поле снаружи. Это легко понять из т. Гаусса. Внутри, конечно, поле будет меняться.

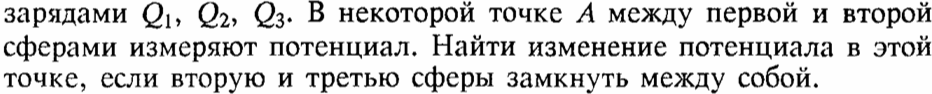
**2.3.1**. Точечный заряд находится на расстоянии от проводящего шара радиуса в вакууме. Чему равен потенциал шара, если а) он не заряжен, б) его заряд равен ?

**Решение**.

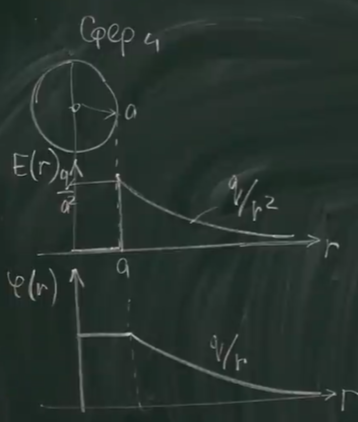
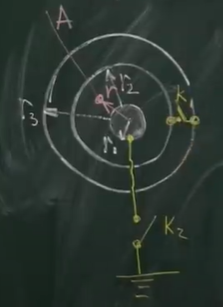
а) На поверхности шара заряды индуцируются так, чтобы поле внутри шара было равно нулю. Потенциал проводящего шара одинаков внутри шара и на его поверхности, поэтому его лучше вычислять там, где проще – а проще внутри шара.

б) Если шар заряжен, то следует добавить потенциал заряженного шара

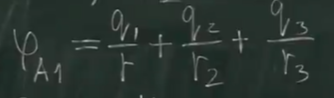




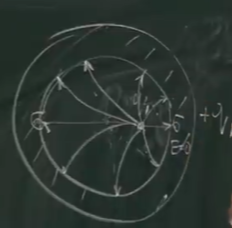
Дополнительно – внутреннюю сферу заземляют.

**Решение**. Заземлить – соединить с большим телом, потенциал которого равен нулю.

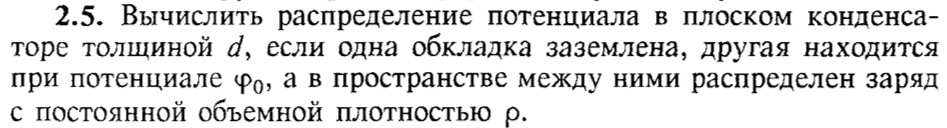
**Случай 1**. Пока нет никаких замыканий, потенциал найдется простым суммированием



**Случай 2**. При замыкании внешних сфер их потенциал станет одинаковым (? ).

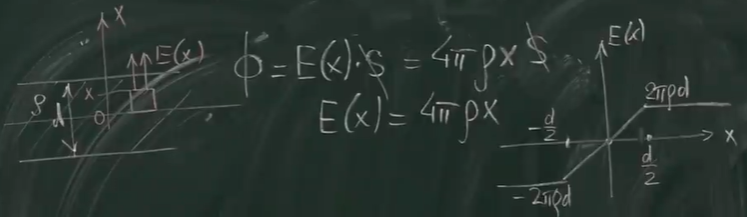
 Это позволяет их рассматривать внешние сферы как слой металла. На поверхности металла заряд распределяется так, чтобы внутри него поле отсутствовало. Итак, пошагово – если внутреннего шара нет – весь заряд уйдет на поверхность и станет равным , на поверхности заряда не будет. Теперь разместим шар внутри сфер – его заряд с обратным знаком появиться на поверхности и, как компенсация – на поверхности по закону сохранения заряда. Поэтому потенциал теперь найдется так:

**Случай 3**. Заземление приводит к тому, что на поверхности сферы обнуляется потенциал и появляется другой заряд . Найдем его

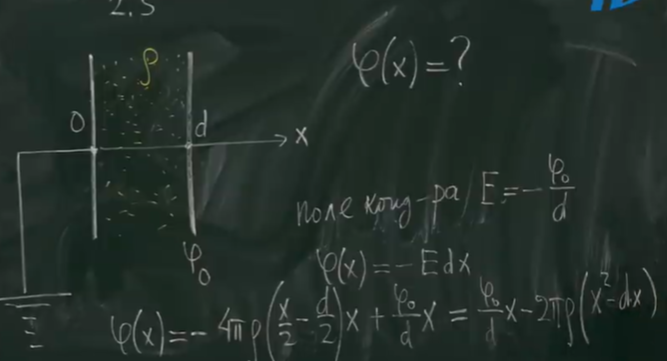


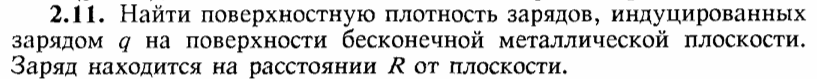
**Решение**.

Поле в конденсаторе, заполненном объемным зарядом.



Если начало координат разместить на обкладке конденсатора, формула перепишется

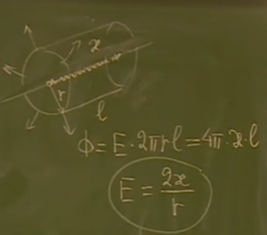
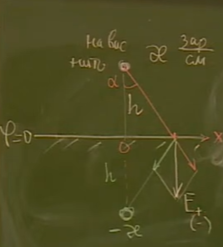
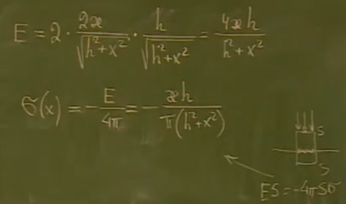




**Решение**.

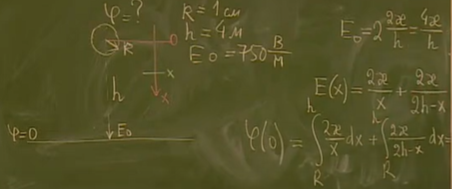
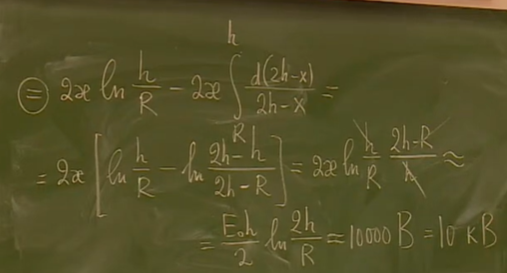
**2.11.1** Найти поверхностную плотность зарядов, индуцированных заряженной нитью на поверхности бесконечной металлической плоскости. Нить находится на расстоянии от плоскости.

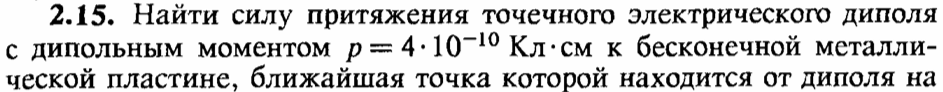
**Решение**.

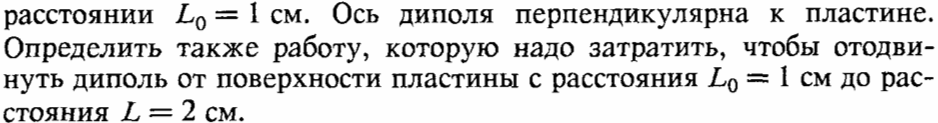
  

**2.11.2**. Над поверхностью земли висит провод на высоте . Напряженность поля на уровне земли . Радиус провода Найти потенциал провода, если потенциал земли равен нулю.

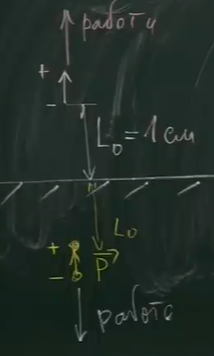
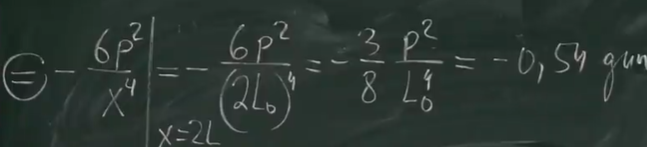
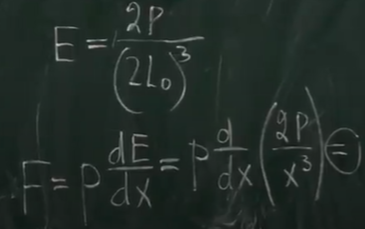
Поле заряженного провода . Используя метод электростатического изображения, найдем, что поле на поверхности земли удваивается и равно . Разместим начало координат в центре провода с осью , направленной в низ.

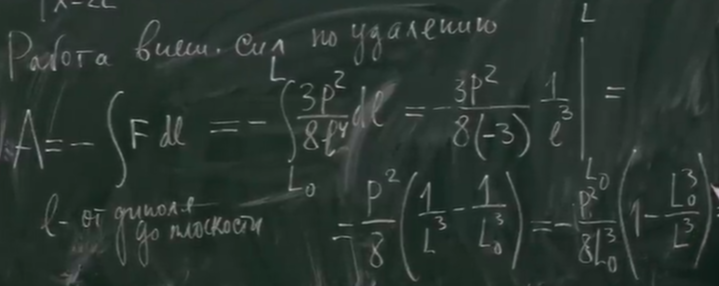
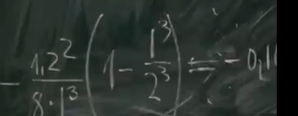
 

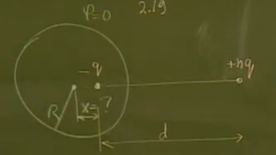
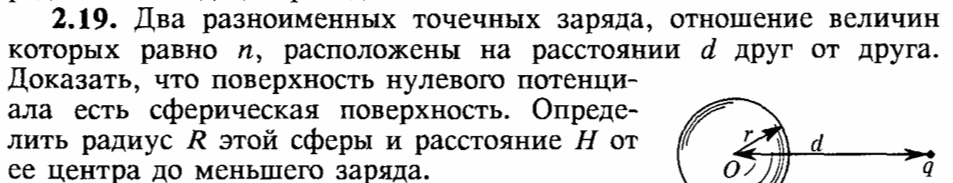




**Решение**.

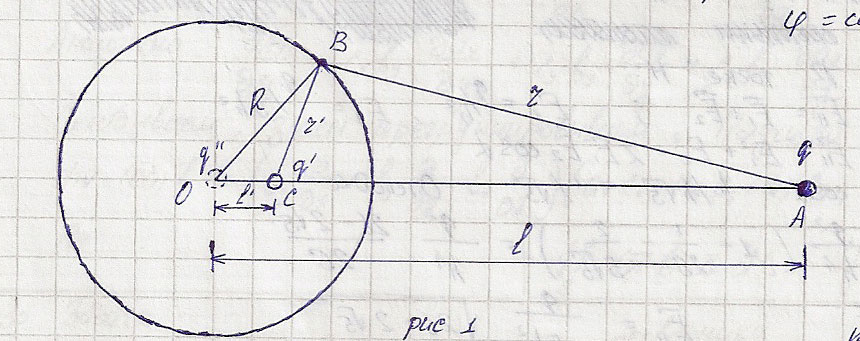
 

****

**Решение**. Разместим начало координат в месте размещения заряда и направим ось в сторону заряда .

**2.20**. Определить силу притяжения между точечным зарядом и металлическим шаром. Заряд находится на расстоянии от центра шара. Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен, 2) шар изолирован, а полный его заряд равен нулю.

**Решение**. Решаем задачу методом изображений. Выясним, какой фиктивный заряд нужно разместить внутри сферы, чтобы на ее поверхности получить равный потенциал.

1. Шар заземлен. На его поверхности . На расстоянии от центра сферы поместим фиктивный заряд . Тогда

Предположив, что , получим . Это отношение позволяет варьировать выбор расстояния . В частности, предположим, что треугольники OBC и OAB подобны (рис). Тогда или . В этом случае

Отметим также, что так что

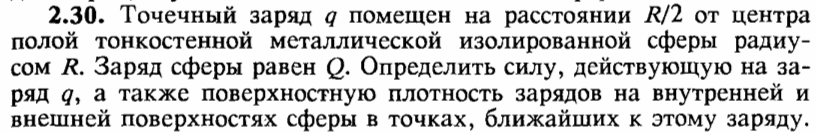
Итак, поместив заряд на расстоянии от центра сферы, мы получим эквипотенциальную поверхность, совпадающую с поверхностью шара.

Сила притяжения найдется теперь элементарно

2. Шар изолирован. Изоляция шара означает, что он не получает и не отдает заряды. Под действием заряда заряды на поверхности шара перераспределяются, но полный заряд остается равным нулю. В таком случае, заряд , полученный в предыдущей задаче, с обратным знаком достаточно расположить в центре шара. Назовем его . Действительно, полный заряд шара тогда равен нулю, а потенциал на поверхности шара создается только этим зарядом (от других зарядов он равен нулю по построению) и равен .

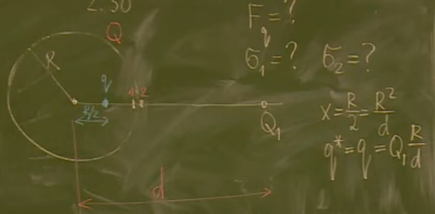
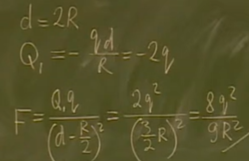
Сила взаимодействия

Замечание. А что, если заряд сферы не равен нулю, а имеет значение ? Как нетрудно догадаться, в этом случае в центре сферы нужно поместить заряд .

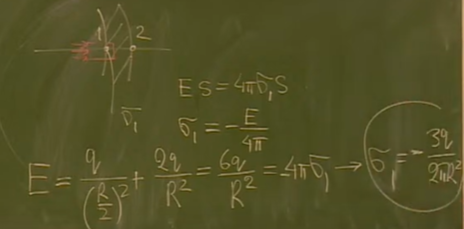
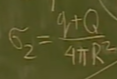


**Решение**.

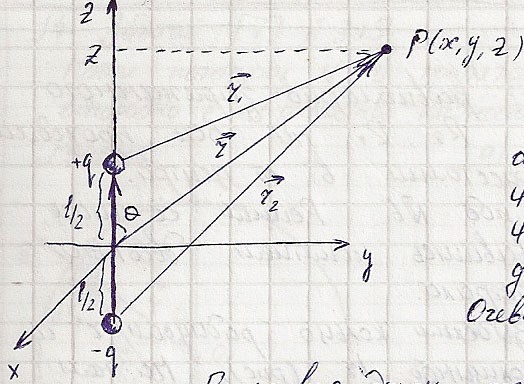
Предположим, что это изображение некоторого внешнего заряда (см. 2.20).

Внешний заряд не оказывает влияние на взаимодействие.

 Тут нечего вычислять: 

**Задача**. Вычислить потенциал поля точечного диполя.

**Решение**. Пусть – потенциал поля заряда , – потенциал поля заряда . Считаем, что . Полный потенциал

Из рисунка видим, что

Диполь точечный, что означает . В этом случае можно пренебрегать членами высокого порядка малости. Кроме того, известно приближение

Итак,

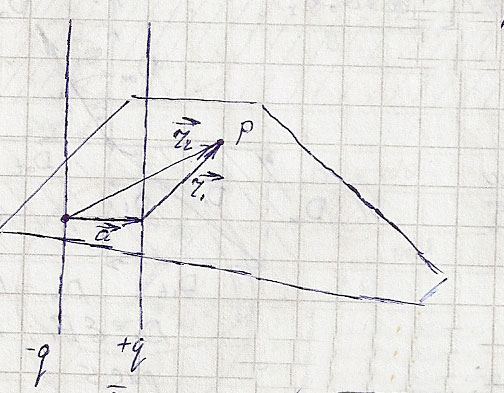
или

Замечаем, что , тогда

Удобно записать результат в векторной форме. Потенциал поля диполя:

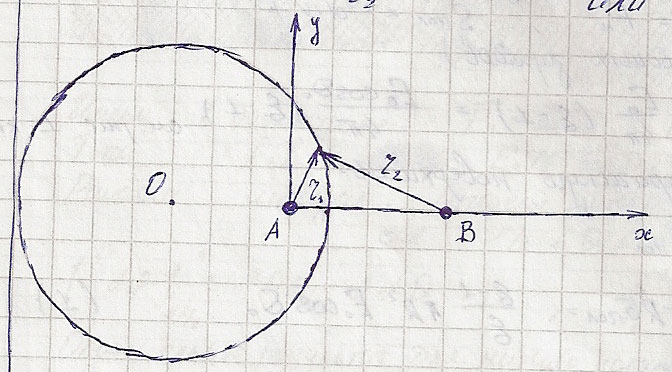
**Задача**. Зная потенциал поля точечного диполя, вычислить напряженность его поля.

**Решение**.

**Задача**. Найти потенциал поля на большом расстоянии от двух близких параллельных зарядов и , расположенных на расстоянии друг от друга (двумерный диполь).

**Решение**. Потенциал заряженной нити

Потенциал в точке :

**Задача**. Показать, что эквипотенциальными поверхностями двух параллельных длинных, равномерно заряженными противоположными знаками нитей являются круговые цилиндры, оси которых параллельны рассматриваемым линиям и лежат в одной плоскости.

Решение. Поле нити:

Потенциал линейного диполя :

От констант избавились, положив, что

Эквипотенциальные поверхности:

Или, просто:

Оси координат расположим как на рисунке, тогда

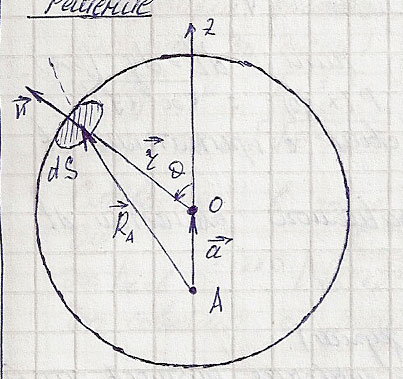
Из последнего уравнения легко получаем:

В плоскости это обычные окружности с центром на оси . Удобно выбрать другой коэффициент

Тогда уравнение перепишется в такое:

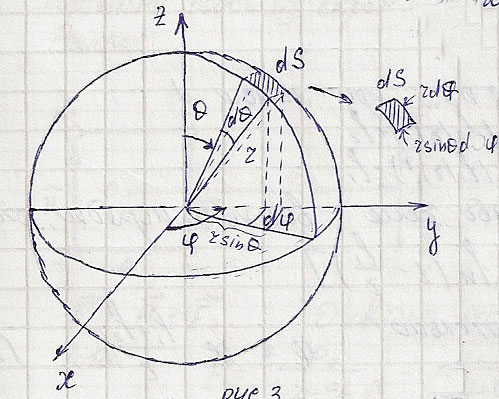
Цент окружностей в точке , а радиус окружностей:

**Задача**. Найти потенциал и напряженность поля в центре сферы радиуса , заряженной однородно с поверхностной плотностью .

**Решение**. Найдем потенциал прямым способом, исходя из его определения.

Пусть – точка внутри сферы, отстоящая от центра на расстоянии (рис). Выделим элементарную площадку и будем ее рассматривать как точечный заряд.

В сферических координатах

 Значение потенциала в т. А:

Из рисунка видно, что

Для вычисления полного потенциала следует просуммировать по всем элементарным площадкам. Иными словами, вычислим интеграл.

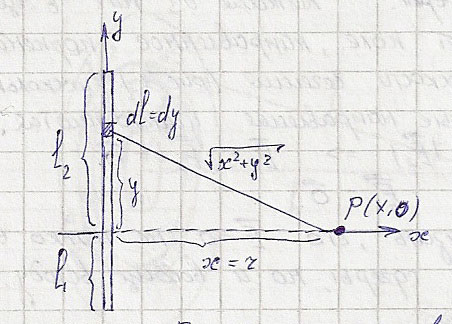
И, поскольку

Таким образом, видно, что потенциал внутри сферы постоянен.

По смыслу потенциала ясно, что напряженность поля внутри сферы имеет постоянное значение (работа по переносу заряда не зависит от того, где внутри сферы располагается заряд). Ввиду симметрии сферы, ясно также, что в центре сферы поле равно нулю. Это означает, что оно равно нулю всюду внутри сферы.

Можно это получить и так:

**Задача**. Найти потенциал равномерно заряженной нити длиной в точке , удаленной от нити на расстояние . Рассмотреть случаи и .

**Решение**. Рассмотрим элемент дины . Потенциал поля, создаваемый этим элементом

Очевидно

Рассмотрим частные случаи.

При .

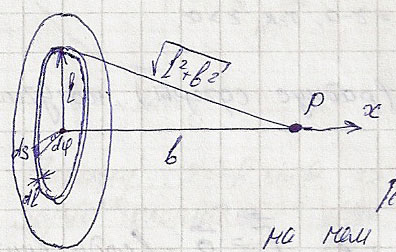
Мы учли известное приближение

Пренебрегаем членами более высокого порядка малости, а также учтем еще одну формулу

При предполагаем, что и .

Впрочем, можно допустить и такое приближение, избавившись от в числителе.

**Задача**. Вычислить потенциал поля равномерно заряженного диска радиуса на оси в точке , удаленной от него на расстояние . Определить поле в этой точке.

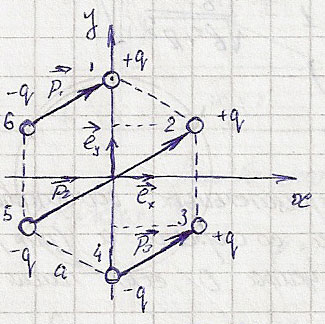
**Решение**. Выделим кольцо радиусом и толщиной . Элемент кольца имеет потенциал

Для кольца

Теперь суммируем по всем кольцам

Чтобы найти поле , заметим следующее. Так как нас интересует только ось диска, можно рассматривать потенциал как функцию от параметра .

**Задача [5]**. Заряды системы, изображенной на рисунке, лежат в плоскости XOY и размещаются в вершинах шестиугольника со стороной . Найти дипольный момент системы и его модуль. Определить в дипольном приближении потенциал системы в точке . Найти наименьшее и наибольшее значение потенциала на расстоянии от системы.

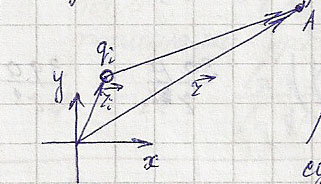
**Решение**. Систему зарядов можно представить как совокупность трех диполей (рис).

1. Дипольный момент системы, по определению, равен

где – радиус-векторы каждого из зарядов . Замечаем, что

Кроме того,

Получаем,

1. Найдем потенциал системы.

Потенциал -го заряда в точке

В дипольном приближении и тогда

Полный потенциал

Дипольный момент мы нашли выше.

1. Максимальные и минимальные значения потенциала найдутся из свойств скалярного произведения . Максимально в случае , минимально при . При потенциал равен нулю.